Substitution et complémentarité des actifs financiers: le cas Moyenne-Variance

Jean-Michel Courtault

SUBSTITUTION ET COMPLEMENTARITE DES ACTIFS FINANCIERS : LE CAS MOYENNE-VARIANCE

Jean-Michel COURTAULT
Faculté de Droit
Université de Franche-Comté
Avenue de l'Observatoire
25030 BESANÇON
(Tel) : 03.81.66.67.18
email : jean-michel.courtault@univ-fcomte.fr

SUBSTITUTION ET COMPLEMENTARITE DES ACTIFS FINANCIERS : LE CAS MOYENNE-VARIANCE[1]

Résumé*: Dans cet article, nous montrons comment il est possible d'améliorer la méthodologie de l'économétrie du portefeuille en transposant les résultats de la théorie du consommateur à la théorie du portefeuille. Nous montrons la totalité des propriétés des demandes d'actifs financiers par rapport aux prix, aux rendements espérés et aux variances covariances des rendements des actifs. L'utilisation de ces propriétés permet d'augmenter substantiellement le nombre de degrés de liberté ce qui devrait permettre d'améliorer l'estimation économétrique des systèmes de demande d'actifs financiers. On peut démontrer de manière beaucoup plus simple certaines des propriétés des demandes d'actifs grâce aux méthodes de la dualité. La connaissance des propriétés de la fonction d'espérance globale devrait permettre également d'estimer de nouveaux systèmes de demande émanant des investisseurs rationnels.*

[1] Je remercie Jean-Pierre Laffargue, Michel Mougeot, Marie-Claude Pichery et Jean-Marie Rousseau pour leurs commentaires sur une version préliminaire de ce texte.

1) Introduction

Les Banques Centrales se sont préoccupées dans les années récentes de l'estimation du système financier en vue de mieux comprendre, notamment, la façon dont la politique monétaire opère. L'objet du présent article est de proposer des solutions à l'un des problèmes rencontrés par les économètres des Banques Centrales souhaitant estimer un système de demandes d'actifs financiers pour un secteur particulier de l'économie, par exemple le secteur des ménages. Nous verrons comment il est possible de diminuer le nombre de paramètres à estimer en s'inspirant des résultats de la théorie du consommateur. La méthodologie dont s'inspire les économètres des Banques Centrales peut être décrite de la manière suivante[2].

Un secteur financier peut être formalisé par la donnée de N fonctions de demande d'actifs. Le premier problème qui se pose aux économètres est de choisir les variables qui influencent la composition du portefeuille d'un secteur. Nous verrons plus loin comment la théorie du portefeuille peut nous aider à choisir les variables pertinentes. Pour illustrer notre propos il suffit de noter pour l'instant qu'on retient la plupart du temps les variables suivantes:

$$(1)\ \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, \mathbf{m}, \Sigma, A, \ldots)$$

où **x** est le vecteur des demandes d'actifs exprimées en quantité, A est la richesse initiale, **p** est le vecteur des prix d'achat des actifs, **m** est le vecteur de leurs rendements espérés et **Σ** est la matrice des variances-covariances des rendements. Les pointillés symbolisant toutes les autres variables que nous n'avons pas pris en compte explicitement (Ex: l'asymétrie et la kurtosis de la distribution des rendements, les coûts de transaction, variables de fiscalité).

Pour estimer un tel système de demande un économètre doit résoudre deux problèmes.

Dans un premier temps, il doit sélectionner une forme particulière pour les fonctions de demande. La plupart du temps, il choisira pour pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés une forme linéaire pour les fonctions **g(.).** Par exemple:

$$(2)\ x_i = \sum_{j=1}^{N} a_j^i\, p_j + \sum_{j=1}^{N} b_j^i\, m_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_{kj}^i\, \sigma_{kj} + d^i A$$

Le second problème auquel il se trouve confronté réside dans l'estimation des coefficients a_j^i, b_j^i, c_{kj}^i et d^i. Si l'on essaye d'estimer ces fonctions sans avoir recours à la théorie on doit évaluer $N + 2N^2 + N^2\,(N+1)/2$ coefficients: N élasticités par rapport à la richesse initiale, N^2 élasticités par rapport aux prix, N^2 élasticités par rapport aux rendements espérés et $N^2\,(N+1)/2$ élasticités par rapport aux variances-covariances[3]. Dans le cas de 10 actifs, il faudrait évaluer 760 élasticités. Même si l'on poussait l'agrégation au point de ne retenir que 5 catégories d'actifs risqués il faudrait estimer 130 élasticités. Dans le cas où l'un de ces 5 actifs peut être considéré non risqué il reste malgré tout 105 élasticités à estimer $[N + 2N^2 + N^2\,(N-1)/2]$. On voit donc que le problème du nombre de degrés de liberté qui se pose à

---

[2]Notre présentation s'inspire de celles d'A. Courakis (1988) et A. Deaton et J. Muellbauer (1980) pp. 400-402.

[3]La matrice des variances-covariances de N actifs risqués comprend N (N+1)/2 éléments différents.

l'économétrie de la consommation pour l'estimation d'un système de demande à un niveau de désagrégation relativement important (pour 10 catégories de biens, il faut estimer 110 élasticités alors que pour 5 catégories de biens il suffit d'en estimer 30) se pose à l'économétrie des marchés financiers même à un niveau très agrégé. En effet on ne dispose que depuis un petit nombre d'années de données trimestrielles.

Dans ce papier, nous montrons que la solution adoptée par l'économétrie du consommateur pour réduire le nombre de coefficients à estimer, à savoir l'utilisation des relations de Slutsky est également valable pour estimer les fonctions de demande d'actifs, si l'on adapte convenablement la notion d'effet de substitution et d'effet revenu à la théorie du portefeuille. Nous montrons que la distinction entre les effets de richesse présente et future qui permet d'établir les propriétés des demandes d'actifs dans le cadre d'un modèle de sélection de portefeuille à états de la nature[4] peut-être adaptée naturellement au modèle Moyenne-Variance. En généralisant pour le modèle Moyenne-Variance une méthode de compensation (basée sur la distinction très intuitive des effets de rendement et des effets de risque) initialement développée par Royama et Hamada (1967) et Levy (1974) nous pouvons montrer la totalité des propriétés des demandes d'actifs relativement aux prix, aux rendements espérés et à la variance covariance des rendements des actifs sans imposer de restriction sur la fonction d'utilité Moyenne-Variance comme K. Royama et S. Hamada et sans supposer l'existence d'un portefeuille ou d'un actif sans risque comme H. Levy[5].

L'application de la méthode de compensation que nous préconisons nous conduit également à montrer que pour réaliser une estimation non biaisée des élasticités des demandes d'actifs financiers par rapport aux taux de rendements espérés et aux covariances des rendements des actifs il est nécessaire de connaître les élasticités des demandes d'actifs par rapport à l'espérance totale et à la variance totale du rendement global du portefeuille

$$(1') \quad \mathbf{x} = \mathbf{g}\left(\mathbf{p}, \mathbf{m}, \Sigma, \mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{V}\right)$$

où E est l'espérance mathématique du rendement du portefeuille et V sa variance totale. En supposant que la forme fonctionnelle des fonctions de demande d'actifs est du type (2) nous sommes en mesure de réduire, en utilisant les relations de Slutsky que nous avons établies pour les demandes d'actifs, le nombre d'élasticités à estimer de $[0,5\ N^3 + 2,5\ N^2 + N]$ à $[0,5\ N^3 + 0,5\ N^2 - 1]$. Dans le cas de 10 actifs risqués il suffit d'estimer 549 élasticités au lieu de 760. Dans le cas de 5 catégories d'actifs dont l'une est constituée d'actifs sans risque il suffit d'estimer 58 élasticités au lieu de 105[6]. De plus des contraintes sur le signe des élasticités des demandes d'actifs par rapport aux prix, aux rendements espérés et aux variances covariances

---

[4] Cf. J-M Courtault (1992).

[5] Ou encore sans supposer la richesse initiale de l'investisseur nulle comme 0.Hart et D. Jaffee (1974).

[6] Le nombre de coefficients à estimer lorsque l'on considère que le prix de chaque actif est fixé arbitrairement à un est de 522 (dans le cas de 10 actifs) et de 56 (dans le cas de 5 actifs dont l'un est sans risque).

des rendements peuvent être imposées ce qui permet d'augmenter le nombre de degrés de liberté.

Toutefois, cette réduction du nombre des élasticités à estimer est insuffisante. Il semble également qu'il soit difficile de supposer a priori comme il est naturel de le faire pour certains biens (comme le thé et la viande) que certains actifs sont indépendants ce qui permettrait de considérer certains effets de substitution comme nuls et de réduire le nombre de paramètres à estimer[7]. En effet l'absence de corrélation entre deux actifs risqués n'est pas suffisante pour qu'ils soient indépendants (au sens économique du terme) même dans le cas où la fonction d'utilité est linéaire par rapport à la moyenne et à la variance du rendement du portefeuille et qu'il n'existe que deux actifs risqués. Par ailleurs la plupart des actifs ont des rendements positivement corrélés.

L'utilisation des propriétés des demandes optimales d'actifs ne permet donc pas d'améliorer de façon suffisante l'estimation des demandes réelles d'actifs. C'est pourquoi la littérature s'est efforcée de dériver des systèmes de demande spécifiques à partir de fonctions d'utilité et des fonctions de répartition du rendement global du portefeuille particulières qui donnent lorsqu'on les combine ensemble des systèmes de demandes d'actifs qui sont relativement simples à estimer. M. Parkin (1970) et M. Saito (1977) ont utilisé la fonction d'utilité exponentielle négative qui lorsqu'on la combine avec une fonction de répartition du rendement du portefeuille normale ou gamma permet d'obtenir des systèmes de demande simples. En effet l'espérance de l'utilité du rendement du portefeuille peut alors s'écrire comme une fonction de la fonction génératrice des moments dont la forme est connue pour un grand nombre de distributions usuelles:

$$Eu(\tilde{W}) = \alpha - \beta\ E(e^{-\gamma \tilde{W}})$$

Cette technique permet de dériver simplement la fonction d'utilité ordinale même dans le cas où le portefeuille est constitué de nombreux actifs risqués. Une telle démarche pour séduisante qu'elle soit n'en demeure pas moins arbitraire puisque l'on choisit des fonctions d'utilité et de répartition non pour leur intérêt théorique mais pour leur simplicité technique.

Pour résoudre ce problème nous avons développé l'approche duale à la théorie du portefeuille et montré qu'il existe une fonction que nous avons appelé la fonction d'espérance globale qui, pour un investisseur rationnel, possède les propriétés d'homogénéité de degré 1 par rapport aux rendements espérés, de convexité par rapport aux rendements espérés et qui permet de dériver directement les fonctions de demande d'actifs compensées des effets de rendement. Il est alors possible de déterminer simplement (sans passer par l'Hessienne bordée) les propriétés des demandes d'actifs par rapport aux rendements espérés. Il devrait également être possible de déterminer de nouveaux systèmes de demandes d'actifs conformes à l'hypothèse de rationalité en spécifiant des formes particulières pour la fonction d'espérance globale.

[7]Cf. F. Bourguignon, P-A Chiappori et P. Rey (1992) p. 128-130.

Le plan de l'article est le suivant. Dans la section 2, les hypothèses du modèle Moyenne-Variance seront explicitées. Puis nous montrerons quelles sont les propriétés des demandes d'actifs par rapport aux prix, aux rendements espérés et aux variances et covariances des actifs individuels. Nous utiliserons dans la section 3 les relations de Slutsky pour de réduire le nombre de coefficients à estimer de plusieurs systèmes de demandes d'actifs. Dans la section 4, nous appliquerons les méthodes de la dualité au problème de la sélection de portefeuille pour démontrer plus simplement les propriétés des demandes d'actifs par rapport à l'espérance des rendements des actifs.

2. Le modèle Moyenne-Variance

Après avoir énoncé les hypothèses relatives aux préférences de l'investisseur ainsi que les contraintes qu'il doit respecter, nous déterminons les propriétés des demandes optimales d'actifs par rapport aux prix, aux rendements espérés et aux variances covariances des rendements des différents actifs ainsi que par rapport à la richesse initiale de l'investisseur et au rendement espéré et à la variance totale du portefeuille.

2.1. Les préférences

Nous supposons que l'agent cherche à maximiser une fonction ordinale d'utilité U(E,V) ayant pour arguments l'espérance du portefeuille E et sa variance V. On supposera que l'utilité est une fonction croissante de l'espérance et une fonction décroissante de la variance

(1) $U_E(E,V) > 0$

(2) $U_V(E,V) < 0$

La représentation graphique dans l'espace Moyenne-Variance de l'équation U(E,V) = u, donne des contours d'indifférence croissants. La pente de ces courbes d'indifférence mesure l'aversion au risque de l'agent. En effet, soit π la prime de risque qu'il faut donner à cet agent pour l'induire à accepter un plus grand risque. Par définition π est telle que[8]

(3) $U(E_0 + \pi, V_0 + V') = U(E_0, V_0)$

En développant le membre de gauche jusqu'au premier ordre on obtient:

$$U(E_0, V_0) + \pi\, U_E(E_0, V_0) + V'\, U_V(E_0, V_0) = U(E_0, V_0)$$

ce qui nous permet d'écrire que la prime de risque par unité de variance est égale à la limite à la pente de la courbe d'indifférence au point (E_0, V_0):

$$(4)\quad \frac{\pi}{V'} = \frac{-U_V(E_0, V_0)}{U_E(E_0, V_0)}$$

On est donc parfaitement autorisé à considérer le coefficient suivant comme une mesure adéquate de l'aversion au risque:

[8]Cf. S. Miller (1975), pp. 300-303.

$$(5)\ R_A\left(E_0,V_0\right)=\frac{-U_V\left(E_0,V_0\right)}{U_E\left(E_0,V_0\right)}$$

On considérera que l'aversion au risque d'un individu par rapport à la richesse espérée est croissante, constante ou décroissante suivant que la pente de la courbe d'indifférence augmente, reste la même ou diminue pour un même niveau de risque lorsque la richesse espérée augmente:

$$(6)\ \frac{\partial R_A\left(E_0,V_0\right)}{\partial E}\ \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 0 \Leftrightarrow \left\{U_{VE}\left(E_0,V_0\right)\frac{U_E\left(E_0,V_0\right)}{U_V\left(E_0,V_0\right)}-U_{EE}\left(E_0,V_0\right)\right\}\ \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 0$$

De même, on considérera que l'aversion au risque d'un individu par rapport au risque est croissante, constante ou décroissante suivant que la pente de la courbe d'indifférence augmente, reste la même ou diminue pour un même niveau de richesse espérée lorsque le risque augmente :

$$(7)\ \frac{\partial R_A\left(E_0,V_0\right)}{\partial V}\ \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 0 \Leftrightarrow \left\{U_{EV}\left(E_0,V_0\right)-U_{VV}\left(E_0,V_0\right)\frac{U_E\left(E_0,V_0\right)}{U_V\left(E_0,V_0\right)}\right\}\ \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\ 0$$

Lorsque les fonctions cardinales d'utilité de la richesse finale sont quadratiques ou exponentielles les fonctions d'utilité ordinales de l'espérance et de la variance de la richesse finale s'écrivent

$$(8)\ U(E,V) = E - \frac{a}{2}\left(V+E^2\right)$$

$$(9)\ U(E,V) = E - \frac{a}{2}V$$

où $a > 0$ et $E < 1/a$. Les mesures de l'aversion au risque s'écrivent respectivement:

$$(8')\ R_A\left(E_0,V_0\right)=\frac{a}{2(1-aE)}>0$$

$$(9')\ R_A\left(E_0,V_0\right)=\frac{a}{2}>0$$

Les agents dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité (8) ont une aversion au risque croissante par rapport à la richesse espérée et une aversion au risque constante par rapport au risque. Les agents dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité (9) ont une aversion au risque constante par rapport à la richesse espérée et au risque.

2.2. Les contraintes

Nous supposerons également que l'agent économique n'est soumis qu'à sa contrainte de richesse initiale:

$$(10)\ \sum_{i=1}^{N} p_i\, x_i = A$$

où p_i est le prix unitaire de l'actif i, x_i est la quantité demandée par l'agent de l'actif i et A est sa richesse initiale. Si l'on supposait également que certains actifs ne peuvent être vendus à découvert (contraintes de non-négativité) il ne serait alors plus possible de différencier le système des conditions du premier ordre pour un optimum pour déterminer les réponses optimales des demandes d'actifs suite à une modification de la structure des rendements[9]. En effet, si certains actifs sont soumis à des contraintes de non-négativité, alors les conditions nécessaires pour un maximum de la fonction d'utilité incluront des inégalités de Kuhn et Tucker correspondant aux contraintes saturées. Il n'est alors plus possible d'utiliser la technique habituelle de différenciation des conditions du premier ordre. Toutefois, M. Jones-Lee (1971) montre dans le cas où la fonction d'utilité Moyenne-Variance est linéaire que les propriétés des demandes optimales ne sont pas fondamentalement modifiées lorsque l'on impose des contraintes de non-négativité.

2.3. Le programme

L'investisseur cherche à résoudre le programme suivant:

$$\underset{\{x_i\}_{i=1,\dots,N}}{\text{Max}}\ U(E,V)$$

$$\text{s.c.}\quad \begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{N} p_i\ x_i \\ E &= \sum_{i=1}^{N} m_i\ x_i + E' \\ V &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i\ x_j\ \sigma_{ij} + V' \end{aligned}$$

où m_i est l'espérance mathématique du rendement de l'actif i, σ_{ij} est la covariance des rendements des actifs i et j et où E' et V' sont respectivement l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire non corrélée avec le rendement des actifs, variable aléatoire introduite pour les besoins de la compensation. Elle nous permettra de déterminer les réactions des agents économiques à une variation du rendement espéré et du risque du portefeuille. De plus les fonctions de demandes optimales solutions du programme (1) seront évaluées pour une valeur nulle de E' et V'.

2.4. Détermination du portefeuille optimal

En supposant que la fonction d'utilité est strictement quasi concave les conditions du premier ordre pour un maximum sont également suffisantes et les demandes optimales sont déterminées implicitement par le système d'équations:

---

[9]Cf. M. Jones-Lee (1971), p. 763-764 et A. Dixit (1990).

$$(11) \begin{cases} U_E(*)\ \mathbf{m} + 2U_V(*)\ \Sigma\ \mathbf{x}^* - \lambda^*\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \qquad\qquad A - \mathbf{p}'\ \mathbf{x}^* = 0 \end{cases}$$

où l'astérisque "*" désigne les valeurs des variables à l'optimum. On en tire les fonctions de demandes optimales:

$$(12)\ \mathbf{x}^* = \frac{\lambda^*}{2U_V(*)}\Sigma^{-1}\ \mathbf{p}\ - \frac{U_E(*)}{2U_V(*)}\Sigma^{-1}\ \mathbf{m}$$

où l'utilité marginale de la richesse initiale à l'optimum est déterminée à partir de la contrainte budgétaire (10)

$$(13)\ \lambda^* = \frac{2U_V(*)}{\mathbf{p}'\Sigma^{-1}\ \mathbf{p}}\left(A + \frac{U_E(*)}{2U_V(*)}\mathbf{p}'\Sigma^{-1}\ \mathbf{m}\right)$$

ce qui nous permet de réécrire les demandes optimales comme suit

$$(14)\ \mathbf{x}^* = \frac{-U_E(*)}{2U_V(*)}\left(\Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{p}'\mathbf{p}\Sigma^{-1}}{\mathbf{p}'\Sigma^{-1}\mathbf{p}}\right)\mathbf{m} + \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{p}}{\mathbf{p}'\Sigma^{-1}\mathbf{p}}A$$

Cette équation ne nous donne pas explicitement les demandes optimales d'actifs sauf dans le cas où l'utilité est une fonction linéaire de la moyenne et de la variance.

2.5. Sensibilité du portefeuille optimal[10]

Nous déterminons la sensibilité des demandes d'actifs par rapport aux divers paramètres du problème en résolvant le système d'équations obtenu en différenciant les conditions du premier ordre pour un optimum. Après avoir établi la règle de compensation des effets de rendement et de risque nous serons en mesure de montrer les propriétés des demandes par rapport aux paramètres de prix, de rendements et de risques des actifs financiers.

2.5.1. Formalisation

La différenciation totale des conditions du premier ordre pour un maximum (11) conduit au système suivant:

$$(15)\ U_E(*)\ dm_i + U_{EE}(*)\ m_i\ dE + U_{EV}(*)\ m_i\ dV - \lambda\ dp_i - p_i\ d\lambda + 2U_V(*)\sum_{j=1}^{N}\left(x_j\ d\sigma_{ij} + \sigma_{ij}\ dx_j\right) + $$
$$+\ 2\sum_{j=1}^{N} x_j\ \sigma_{ij}\left(U_{VE}(*)\ dE + U_{VV}(*)\ dV\right) = 0$$

$$(16)\ dA - \sum_{i=1}^{N} p_i\ dx_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ dp_i = 0$$

que l'on peut réécrire en utilisant la définition de l'espérance et de la variance du portefeuille:

---

[10] La plupart de ces propriétés ont été établies, dans le cadre du modèle Moyenne-Variance, sous des hypothèses restrictives concernant la fonction d'utilité ou l'ensemble des actifs disponibles; cf. Notamment, A. Courakis (1974), 0. Hart et D. Jaffee (1974), M. Jones-Lee (1971), H. Levy (1974) et S. Royama et K. Hamada (1967).

$$(17)\ \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \mathbf{x}'d\mathbf{p} - dA \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{\Psi}$ et $\mathbf{H}$ sont donnés par:

$$\Psi = \left(\psi_i\right) = -U_E(*)\ dm_i - m_i\ U_{EE}(*)\ \left(dE' + \sum_{i=1}^{N} x_i\ dm_i\right) + \lambda\ dp_i - 2\ U_V(*)\ \sum_{k=1}^{N} x_k\ d\sigma_{ik} -$$

$$- m_i\ U_{EV}(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i\ x_j\ d\sigma_{ij} + dV'\right) -$$

$$-\ 2\ \sum_{k=1}^{N} x_k\ \sigma_{ik} \left(\ U_{VE}(*)\ \left(dE' + \sum_{i=1}^{N} x_i\ dm_i\right) +\ U_{VV}(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i\ x_j\ d\sigma_{ij} + dV'\right)\right)$$

$$\mathbf{H} = \left(h_{ij}\right) = U_{EE}(*)\ m_i\ m_j + 2\ U_{EV}(*)\ m_j \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ik}\ x_k + +2\ U_{VE}(*)\ m_i\ \sum_{k=1}^{N} x_k\ \sigma_{jk} +$$

$$+ 2\ U_V(*)\ \sigma_{ij} + 4\ U_{VV}(*)\ \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\ \sigma_{jk}\right) \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\ \sigma_{ik}\right)$$

2.5.2. La règle de compensation

Pour déterminer la méthode de compensation il nous faut évaluer la variation de l'utilité induite à l'optimum par une variation des paramètres du programme (I). On a par définition:

$$(18)\ dU(E, V) = U_E(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\ dm_i + \sum_{i=1}^{N} m_i\ dx_i + dE'\right) +$$

$$+ U_V(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_i\ x_j\ d\sigma_{ij} + \sigma_{ij}\left(x_i\ dx_j + x_j\ dx_i\right)\right) + dV'\right)$$

$$dU(E, V) = \sum_{i=1}^{N}\left(U_E(*)\ m_i + 2\ U_V(*) \sum_{j=1}^{N} x_j\ \sigma_{ij}\right) dx_i + U_E(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\ dm_i + dE'\right)$$

$$+ U_V(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i\ x_j\ d\sigma_{ij} + dV'\right)$$

que l'on peut réécrire encore en utilisant les conditions du premier ordre (11):

$$(19)\ dU(E, V) = \lambda\left(dA - \sum_{i=1}^{N} x_i\ dp_i\right)\ + U_E(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\ dm_i + dE'\right)$$

$$+ U_V(*)\ \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i\ x_j\ d\sigma_{ij} + dV'\right)$$

d'où l'on déduit les variations compensatrices de la richesse initiale A, de l'espérance E' et de la variance V'

$$(20)\ dA = \sum_{i=1}^{N} x_i\ dp_i$$

$$(21)\ dE' = -\sum_{i=1}^{N} x_i\ dm_i$$

$$(22)\ dV' = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i\ x_j\ d\sigma_{ij}$$

L'analogie avec la méthode de compensation des effets de richesse présente et future de la théorie du portefeuille dans le cadre d'un modèle à états de la nature est frappante, les effets de richesse future correspondant aux effets de rendement total et aux effets de risque total[11]

On peut expliquer de la manière suivante l'existence d'effets de rendement et d'effet de risque. L'augmentation du rendement espéré ou du risque d'un actif crée un effet de rendement ou de risque dans la mesure où le rendement espéré ou le risque total à composition du portefeuille inchangé va augmenter. Pour obtenir l'effet de substitution pur d'une augmentation du rendement espéré ou du risque d'un actif il faut compenser la variation induite du rendement ou du risque total. En utilisant la règle de compensation donnée par les équations (15) et (16) nous serons en mesure de démontrer qu'une augmentation de l'espérance du rendement (de la variance du rendement) d'un actif induit une augmentation (une diminution) de la demande compensée de cet actif.

2.5.3. Sensibilité des actifs aux différents paramètres

On peut déterminer l'influence des variations de prix, de rendement espéré, de variances et de covariances des rendements de la richesse initiale et de l'espérance mathématique et de la variance totale du rendement du portefeuille à partir du système (17). Il suffit en effet d'inverser l'Hessienne bordée pour obtenir la variation de la demande de l'actif k par rapport au prix de l'actif i:

$$(23)\ \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = x_i \frac{D_{N+1k}}{D} + \lambda \frac{D_{ik}}{D}$$

où D_{ik} est le cofacteur associé à la $i^{ème}$ ligne et à la $j^{ème}$ colonne de la Hessienne bordée. La variation de la demande de l'actif k par rapport à la richesse initiale:

$$(24)\ \frac{\partial x_k}{\partial A} = -\frac{D_{N+1k}}{D}$$

la variation de la demande de l'actif k par rapport au rendement espéré de l'actif i:

$$(25)\ \frac{\partial x_k}{\partial m_i} = -U_E(*)\ \frac{D_{ik}}{D} - U_{EE}(*)\ \sum_{l=1}^{N} m_l\ \frac{D_{lk}}{D} - 2\ U_{VE}(*)\ x_i\ \sum_{l=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} x_h\ \sigma_{lh}\ \frac{D_{lk}}{D}$$

la variation de la demande de l'actif k par rapport à l'espérance du rendement du portefeuille:

$$(26)\ \frac{\partial x_k}{\partial E'} = -U_{EE}(*)\ \sum_{l=1}^{N} m_l\ \frac{D_{lk}}{D} - 2\ U_{VE}(*)\ \sum_{l=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} x_h\ \sigma_{lh}\ \frac{D_{lk}}{D}$$

la variation de la demande de l'actif k par rapport à la covariance des rendements des actifs i et j:

[11]Cf. J-M Courtault (1992), relations (11) et (12) p. 988.

$$(27)\quad \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}} = -2\, U_V(*) \left(x_j \frac{D_{jk}}{D} + x_i \frac{D_{ik}}{D} \right) - 2\, x_i\, x_j\, U_{EV}(*) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D} -$$

$$- 4\, U_{VV}(*)\, x_i\, x_j \sum_{l=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} x_h\, \sigma_{hl} \frac{D_{lk}}{D}$$

la variation de la demande de l'actif k par rapport au risque spécifique de l'actif i:

$$(28)\quad \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}} = -2\, U_V(*)\, x_i \frac{D_{ik}}{D} - x_i^2\, U_{EV}(*) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D} -$$

$$- 2\, U_{VV}(*)\, x_i^2 \sum_{l=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} x_h\, \sigma_{hl} \frac{D_{lk}}{D}$$

la variation de la demande de l'actif k par rapport au risque global du portefeuille:

$$(29)\quad \frac{\partial x_k}{\partial V'} = -U_{EV}(*) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D} - 2\, U_{VV}(*) \sum_{l=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} x_h\, \sigma_{hl} \frac{D_{lk}}{D}$$

2.5.4. Equations de Slutsky pour les actifs

Il est possible de décomposer l'influence d'une variation du prix, du rendement ou du risque d'un actif sur la demande d'un autre actif en un effet de substitution et en un effet richesse, un effet rendement ou un effet risque respectivement. En effet, pour déterminer les variations compensées des demandes d'actifs induites par les variations des prix, des rendements espérés et des covariances des rendements des actifs il suffit d'appliquer les relations (20)-(22) au système d'équations (17):

$$(17')\quad \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\Phi = (\phi_i) = -U_E(*)\, dm_i + \lambda\, dp_i - 2\, U_V(*) \sum_{k=1}^{N} x_k\, d\sigma_{ik}$

En inversant la Hessienne bordée on obtient les variations des demandes compensées. Ainsi la variation de la demande compensée de l'actif k induite par une variation du prix de l'actif i s'écrit:

$$(23')\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-COMP} = \lambda \frac{D_{ik}}{D}$$

La variation de la demande compensée de l'actif k induite par une variation du rendement espéré de l'actif i s'écrit:

$$(25')\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial m_i}\right|_{E'-COMP} = -U_E(*) \frac{D_{ik}}{D}$$

La variation de la demande compensée de l'actif k induite par une variation de la variance du rendement de l'actif i s'écrit

$$(28')\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{V'\text{-}COMP} = -2\, U_V(*)\, x_i \frac{D_{ik}}{D}$$

La variation de la demande compensée de l'actif k induite par une variation de la covariance des rendements des actifs i et j s'écrit

$$(27')\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{V'\text{-COMP}} = -2\ U_V(*)\left(x_j \frac{D_{jk}}{D} + x_i \frac{D_{ik}}{D}\right)$$

En utilisant les relations (23), (23') et (24) on peut décomposer l'influence d'une variation du prix de l'actif i sur la demande de l'actif k en un effet de substitution et un effet richesse:

$$(30)\quad \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-\text{COMP}} - x_i \frac{\partial x_k}{\partial A}$$

En utilisant les relations (25), (25') et (26) on peut décomposer l'influence d'une variation du rendement espéré de l'actif i sur la demande de l'actif k en un effet de substitution et un effet de rendement:

$$(31)\quad \frac{\partial x_k}{\partial m_i} = \left.\frac{\partial x_k}{\partial m_i}\right|_{E'\text{-COMP}} + x_i \frac{\partial x_k}{\partial E'}$$

En utilisant les relations (27), (27') et (29) on peut décomposer l'influence d'une variation de la covariance des rendements des actifs i et j sur la demande de l'actif k en un effet de substitution et un effet de risque:

$$(32)\quad \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}} = \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{V'\text{-COMP}} + 2\ x_i\ x_j \frac{\partial x_k}{\partial V'}$$

De même, on peut décomposer l'influence d'une variation de la variance du rendement de l'actif i sur la demande de l'actif k en un effet de substitution et un effet de risque:

$$(33)\quad \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}} = \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{V'\text{-COMP}} + x_i^2 \frac{\partial x_k}{\partial V'}$$

2.5.5. Propriétés de la sensibilité des actifs aux prix

Compte tenu des propriétés de symétrie et de négativité du Hessienne bordé, on peut établir les propriétés suivantes des demandes optimales. Les effets-prix croisés de substitution compensés des effets de richesse initiale sont symétriques:

$$(34)\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-\text{COMP}} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\right|_{A-\text{COMP}}$$

alors que les effets-prix propres de substitution compensés des effets de richesse initiale sont négatifs

$$(35)\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-\text{COMP}} \leq 0$$

Il est ainsi possible de classer les actifs en p-compléments et en p-substituts suivant que le signe de (34) est négatif ou positif, respectivement. Notons que dans le cas d'un actif normal

$\left(\frac{\partial x_k}{\partial A} \geq 0\right)$ vendu à découvert une augmentation de son prix initial pourra se traduire par une diminution en valeur absolue de la quantité de cet actif en portefeuille, c'est-à-dire une augmentation de la quantité de cet actif vendu à découvert.

2.5.6. Propriétés de la sensibilité des actifs au rendement espéré

Les effets-rendements espérés croisés de substitution compensés des effets d'espérance totale sont symétriques:

$$(36)\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial m_i}\right|_{E'-COMP} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial m_k}\right|_{E'-COMP}$$

alors que les effets-rendements espérés propres de substitution compensés des effets d'espérance totale sont positifs:

$$(37)\quad \left.\frac{\partial x_i}{\partial m_i}\right|_{E'-COMP} \geq 0$$

On pourra classer les actifs en m-substituts et en m-compléments suivant que le signe de (33) est négatif ou positif, respectivement. Le classement auquel on aboutira est le même que celui auquel on aboutit en étudiant le signe des effets-prix croisés de substitution compensés des effets de richesse initiale puisque l'on a

$$(38)\quad \frac{\left.\frac{\partial x_k}{\partial m_i}\right|_{E'-COMP}}{\left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-COMP}} = \frac{-U_E(*)}{\lambda}$$

Des actifs p-complémentaires (p-substituables) seront donc m-complémentaires (m-substituables).

De plus la substitution domine la complémentarité. En développant le déterminant de l'Hessienne bordée par rapport aux prix des actifs on obtient la relation suivante:

$$\sum_{k=1}^{N} p_k \left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-COMP} = 0 = \sum_{k=1}^{N} p_k \left.\frac{\partial x_k}{\partial m_i}\right|_{E'-COMP}$$

ce qui implique en tenant compte de (31) et (34):

$$(39)\quad \sum_{k=1}^{N} p_k \left.\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\right|_{A-COMP} \geq 0$$

$$(40)\quad \sum_{k=1}^{N} p_k \left.\frac{\partial x_k}{\partial m_i}\right|_{E'-COMP} \leq 0$$

Les actifs ne peuvent par conséquent pas être tous complémentaires entre eux. S'il n'y a que deux actifs ils doivent être nécessairement substituables.

2.5.7. Propriétés de la sensibilité des actifs aux risques

Les effets-risque propre de substitution compensés des effets induits de variance totale sont négatifs:

$$(41)\quad \left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{V'\text{-COMP}} \leq 0$$

i.e. la demande de l'actif i diminue, mutatis mutandis, lorsque le risque individuel de l'actif i augmente. Le produit des effets-corrélation propre de substitution compensée des effets induits de variance totale diminue lorsque la corrélation augmente[12]

$$(42)\quad \left.\frac{\partial\left(x_i\ x_j\right)}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{V'\text{-COMP}} \leq 0$$

Autrement dit, l'augmentation de la covariance des rendements de deux actifs entraîne, mutatis mutandis, des variations de sens opposé des quantités de ces deux actifs détenus en portefeuille. L'augmentation de la variance d'un actif accroît (diminue), mutatis mutandis, la demande d'un actif substituable (complémentaire)

$$(43)\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{V'\text{-COMP}} \geq (\leq) 0$$

suivant que les actifs i et k sont substituables (complémentaires) i.e. l'accroissement du risque d'un actif augmente la demande compensée de tous les actifs substituables et diminue la demande compensée de tous les actifs complémentaires. Plus généralement, l'augmentation de la covariance du rendement de deux actifs accroît (diminue), mutatis mutandis, la quantité détenu en portefeuille d'un actif substituable (complémentaire) aux deux premiers:

$$(44)\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{V'\text{-COMP}} \geq (\leq) 0$$

suivant que l'actif k est substituable (complémentaire) avec i et avec j et que ces deux actifs sont détenus en position longue. Lorsque les actifs dont la covariance augmente sont vendus à découvert la demande compensée d'un actif substituable (complémentaire) diminue (augmente).

Les effets de substitution croisés d'une augmentation du risque d'un actif ne sont pas symétriques. En revanche la variation de la demande compensée de l'actif k induite par une variation du risque de l'actif i pondérée par la demande de l'actif k est égale à la variation de la demande compensée de l'actif i induite par une variation du risque de l'actif k pondérée par la demande de l'actif i:

$$(45)\quad x_k \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{V'\text{-COMP}} = x_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{kk}}\right|_{V'\text{-COMP}}$$

---

[12]Cf. Appendice [1].

Il est possible de relier la variation de la demande compensée d'un actif k induite par la variation de la covariance du rendement de deux autres actif s i et j en fonction de la variation de la demande compensée de l'actif k induite par la variation du risque spécifique des actifs i et j**.** On peut en effet écrire en utilisant les relations (27') et (28'):

$$(46)\quad \left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{\text{V'-COMP}} = \frac{x_i}{x_j}\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{jj}}\right|_{\text{V'-COMP}} + \frac{x_j}{x_i}\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{\text{V'-COMP}}$$

On peut encore exprimer la variation de la demande compensée de l'actif k induite par la variation de la covariance du rendement de deux autres actifs i et j en fonction de la variation de la demande compensée des actifs i et j induite par la variation du risque spécifique de l'actif k**.** On peut en effet écrire grâce à la relation (45):

$$\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{\text{V'-COMP}} = \frac{x_i}{x_k}\left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{kk}}\right|_{\text{V'-COMP}} + \frac{x_j}{x_k}\left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{kk}}\right|_{\text{V'-COMP}}$$

En inter changeant dans la relation (27') les indices i, j et k on peut écrire les relations suivantes:

$$\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_j}{x_i}\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{\text{V'-COMP}} = \left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{ik}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_k}{x_i}\left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{\text{V'-COMP}}$$

$$\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_i}{x_j}\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{jj}}\right|_{\text{V'-COMP}} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{kj}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_k}{x_j}\left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{jj}}\right|_{\text{V'-COMP}}$$

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{kj}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_j}{x_k}\left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{kk}}\right|_{\text{V'-COMP}} = \left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{ik}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_i}{x_k}\left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{kk}}\right|_{\text{V'-COMP}}$$

En isolant de ces relations la variation de la demande compensée de l'actif k induite par une variation de la covariance des rendements des actifs i et j on obtient:

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{ik}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_k}{x_i}\left.\frac{\partial x_j}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{\text{V'-COMP}} + \frac{x_j}{x_i}\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{ii}}\right|_{\text{V'-COMP}} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{kj}}\right|_{\text{V'-COMP}} - \frac{x_k}{x_j}\left.\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_{jj}}\right|_{\text{V'-COMP}} + \\ + \frac{x_i}{x_j}\left.\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_{jj}}\right|_{\text{V'-COMP}}$$

2.6. Les effets de rendement et les effets de risque

Dans la mesure où les portefeuilles optimaux sont bien diversifiés (x_i est petit par rapport à. la richesse investie) on pourrait considérer que les effets de rendements et les effets de risque sont négligeables par rapport aux effets de substitution. Cependant compte tenu du degré d'agrégation retenu par les économètres il n'est plus possible de les négliger. Après avoir montré pour quelles fonctions d'utilité particulières les effets de rendement et de risque s'annulent, nous essayerons de relier le signe des effets de rendement et de risque à l'aversion au risque d'un investisseur.

2.6.1. Fonctions d'utilité particulières

Dans le cas où la fonction d'utilité de la richesse finale est quadratique les effets de risque induits par une variation de la covariance entre deux actifs sont nuls (ou plus exactement les effets richesse n'ont pas d'influence sur la composition du portefeuille). En effet, dans le cas où l'utilité cardinale de la richesse est quadratique les dérivées secondes de la fonction d'utilité ordinale (8) s'annulent:

$$U_{EV}(E, V) = 0 = U_{VV}(E, V)$$

et par conséquent les effets de risque s'annulent:

$$(47)\ \forall\ i = 1, \dots, N \qquad \frac{\partial x_i}{\partial V'} = 0$$

Dans le cas où la fonction d'utilité cardinale est exponentielle et où le rendement du portefeuille suit une loi normale, la fonction d'utilité ordinale est linéaire par rapport à l'espérance du portefeuille et à sa variance et les effets de risque et les effets de rendements sont nuls. En effet, les dérivées secondes de la fonction ordinale (9) s'annulent:

$$U_{EE}(E, V) = U_{EV}(E, V) = U_{VV}(E, V) = 0$$

et par conséquent les effets de rendement et les effets de risque s'annulent:

$$(48)\ \forall\ i = 1, \dots, N \qquad \frac{\partial x_i}{\partial V'} = 0 = \frac{\partial x_i}{\partial E'}$$

2.6.2. Analyse générale

Plus généralement le signe des effets de rendement total et de risque total peuvent être déterminés en fonction de la courbure des courbes d'indifférence. On peut en effet réécrire les effets de rendement et de risque de la manière suivante[13]:

$$(49)\ \frac{\partial x_k}{\partial E'} = \left(U_{VE}(*)\ \frac{U_E(*)}{U_V(*)} - U_{EE}(*) \right) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D}$$

$$(50)\ \frac{\partial x_k}{\partial V'} = \left(U_{Vv}(*)\ \frac{U_E(*)}{U_V(*)} - U_{EV}(*) \right) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D}$$

Les effets de rendement et de risque se présentent ainsi comme le produit de deux éléments dont l'un deux peut être relié à l'aversion au risque. Si l'on suppose de plus que

$$(51)\ \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D} \geq 0$$

le signe des effets d'espérance totale sera positif, nul ou négatif suivant le signe de l'expression:

[13]Cf. Appendice [2].

$$\left(U_{VE}(*) \, \frac{U_E(*)}{U_V(*)} - U_{EE}(*) \right) \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$$

Ce qui est équivalent à[14]

$$(52) \quad \frac{\partial R_A(E^*, V^*)}{\partial E} \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$$

Autrement dit, les effets d'espérance totale seront positifs, nuls ou négatifs suivant que l'aversion absolue au risque par rapport à la richesse espérée est croissante, constante ou décroissante. De même le signe des effets de risque total est positif, nul ou négatif suivant que:

$$\left(U_{EV}(*) - U_{VV}(*) \, \frac{U_E(*)}{U_V(*)} \right) \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$

c'est-à-dire suivant que[15]

$$(53) \quad \frac{\partial R_A(E^*, V^*)}{\partial V} \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$

Autrement dit, les effets de risque total seront positifs, nuls ou négatifs suivant que l'aversion absolue au risque par rapport au risque du portefeuille est décroissante, constante ou croissante.

3. Applications

Nous allons étudier les implications des développements précédents pour des systèmes de demande d'actifs particuliers. Nous supposerons comme les économètres dans la pratique que le prix de chaque actif est égal à un Franc. Nous considérerons dans un premier temps un système de demande où le risque des actifs est absent puis nous considérerons un système de demande où le risque des actifs est pris en compte.

3.1. Un système de demandes d'actifs à risque constant

Supposons dans un premier temps que le risque des actifs ne varie pas au cours de la période et qu'il existe un actif sans risque. Une telle hypothèse est hardie mais elle est fréquemment adoptée par les économètres. On peut alors écrire que les demandes d'actifs financiers s'écrivent:

[14]Cf. Relation (6).
[15]Cf. Relation (7).

$\mathbf{a} = g(\mathbf{m}, A)$

où **a** représente le vecteur des demandes d'actifs exprimées en valeur. Il est en effet possible de montrer que les effets de rendement total peuvent s'exprimer en fonction des effets de richesse initiale lorsqu'il existe un actif à rendement certain[16].

Si l'on ne souhaite pas supposer de forme fonctionnelle particulière pour ces demandes d'actif s on peut obtenir[17] le modèle suivant:

$$(54)\ \Delta\alpha_i = b_i\ \Delta\mathrm{Log}\overline{A} + \sum_{l=0}^{N} c_{il}\ \Delta\overline{m}_l + \sum_{l=0}^{N} e_{il}\ \Delta\overline{m}_l \qquad i = 0,\ldots,N$$

où

$$\Delta\mathrm{Log}\overline{A} = \Delta\mathrm{Log}A - \frac{1}{m_0}\sum_{l=0}^{N}\alpha_l\ \Delta m_l \quad \text{avec } \sum_{l=0}^{N}\alpha_l = 1$$

$$\Delta\mathrm{Log}\overline{m}_l = \Delta m_l - \frac{1}{m_0}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Delta a_k}{\Delta A}\ \Delta m_k \quad \text{avec } \sum_{k=0}^{N}\frac{\Delta a_k}{\Delta A} = 1$$

où α_i est le pourcentage de la richesse initiale investie dans l'actif i et où Δ est l'opérateur différence.

La caractéristique la plus intéressante de ce système c'est qu'il est linéaire et que par conséquent on peut l'estimer équation par équation par la méthode des moindres carrés ordinaires.

Le système d'équations (54) comporte $(N+1)\times(2\ (N+1)+1)$ coefficients à estimer. Si l'on impose les $(N+2)+\left(\frac{(N+1)^2-(N+1)}{2}\right)$ contraintes suivantes découlant d'un comportement rationnel:

$$\forall i = 0,\ldots,N\ \sum_{i=0}^{N} e_{il} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N} b_i = 0$$

$$\forall i,l = 0,\ldots,N\ \ c_{il} = c_{li}$$

alors, il ne reste plus qu'à estimer que[18]

$$\left[(N+1)\times(2(N+1)+1)\right]-\left[(N+2)+\left(\frac{(N+1)^2-(N+1)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(3(N+1)^2+(N+1)\right)-1$$

$$= \frac{3}{2}N^2+\frac{7}{2}N+1$$

paramètres indépendants. Pour un système composé de 9 actifs risqués et d'un actif sans risque il suffit d'estimer 154 coefficients au lieu des 210 initiaux, soit un gain de 56 degrés de

[16] Cf. J-M Courtault (1992), équations (24") et (25") p. 993.

[17] Cf. J-M Courtault (1994).

[18] On peut dire également qu'il n'y a que (N+2) contraintes et (N+l) + (N+l)² + (N+l) (N+2)/2 coefficients à estimer ce qui donne le même nombre de coefficients indépendants.

liberté (26.6%). Dans le cas de 4 actifs risqués et d'un actif sans risque il suffit d'estimer 39 coefficients au lieu de 55, soit un gain de 29%.

L'intérêt de l'approche de l'information tient à ce qu'il n'a pas été nécessaire de postuler une forme particulière pour la fonction d'utilité pour obtenir des fonctions de demande linéaire par rapport à des indices de richesse et de rendement. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle oblige à estimer N^2 coefficients supplémentaires (e_{il}) par rapport aux fonctions de demande linéaires classiques ce qui explique que l'imposition des relations de symétrie ne permet pas de diminuer de façon suffisante le nombre de coefficients à estimer.

3.2. Un système de demande linéaire

L'intérêt des développements précédents est qu'ils indiquent quelles sont les variables dont il faut tenir compte pour réaliser une bonne estimation des demandes d'actifs financiers. Dans le cas du modèle Moyenne-Variance les paramètres influençant la demande d'actifs financiers sont les taux de rendements espérés, la matrice des variances-covariances, la richesse présente ainsi que l'espérance totale et la variance totale de la richesse future. On peut estimer le modèle suivant:

$$(55)\quad a_i = \sum_{j=1}^{N} b_j^i\, m_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_{kj}^i\, \sigma_{kj} + d^i\, A + e^i\, E' + f^i\, V'$$

où a_i représente la valeur investie dans l'actif i. On peut réécrire les relations (3l)-(33) de la façon suivante:

$$(31')\quad b_j^i = b_j^{i*} + a_j\, e^i$$

$$(32')\quad c_{kj}^i = c_{kj}^{i*} + 2\, a_j\, a_k\, f^i$$

$$(33')\quad c_{jj}^i = c_{jj}^{i*} + \left(a_j\right)^2 f^i$$

Ce qui nous permet de réécrire (55) de la manière suivante:

$$(55')\quad a_i = \sum_{j=1}^{N} b_j^{i*}\, m_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_{kj}^{i*}\, \sigma_{kj} + d^i\, A + e^i\, E + f^i\, V$$

où l'on a utilisé les relations

$$(56)\quad \sum_{i=1}^{N} m_i\, a_i + E' \equiv E$$

$$(57)\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i\, a_j\, \sigma_{ij} + V' \equiv V$$

On peut imposer aux coefficients du système d'équations (53') les contraintes suivantes qui assurent le respect de la contrainte budgétaire[19]:

[19]Les relations (56) et (57) sont des équations de définition qui n'impliquent aucune contrainte supplémentaire sur les coefficients du système (55').

$$(58)\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} d^i = 1 \\ \sum_{i=1}^{N} e^i = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} f^i = 0 \end{cases}$$

$$(59)\ \sum_{i=1}^{N} b_j^{i*} = 0 \qquad \forall j = 1,\dots,N$$

$$(60)\ \sum_{i=1}^{N} c_{kj}^{i*} = 0 \qquad \forall j,k = 1,\dots,N$$

et le respect des axiomes de la rationalité:

$$(61)\ b_j^{i*} = b_i^{j*}$$

Il y a en tout N sensibilités des demandes d'actifs par rapport à la richesse initiale, N sensibilités par rapport à l'espérance totale du portefeuille et également N sensibilités par rapport au risque total du portefeuille. L'utilisation de la relation (61) permet de réduire le nombre des sensibilités par rapport aux rendements espérés des différents actifs de N^2 à N/2 (N+l). Le nombre des sensibilités par rapport aux variances-covariances des rendements est égal à N^2 (N+1)/2 car la matrice des variances-covariances est symétrique. Il y a donc en tout 0.5 N^3 + N^2 + 3.5 N coefficients à estimer et N^2 + N + 3 contraintes (équations (58)-(60)). Il n'y a donc que 0.5 N^3 + 2.5 N - 3 coefficients indépendants. Dans le cas de 10 actifs risqués il faut estimer 522 coefficients, dans le cas de 4 actifs risqués et d'un actif sans risque il faut en estimer 56[20].

On peut également tester (ou imposer) les relations suivantes:

$$(63)\ b_i^{i*} \geq 0$$

ou encore la positivité des effets de rendement propres;

$$(64)\ \sum_{j=1}^{N} b_j^{i*} = 0$$

ou encore la linéarité des demandes d'actifs par rapport aux rendements espérés;

$$(65)\ c_{ii}^{i*} \leq 0$$

ou encore la négativité des effets de risque propres; Enfin on peut tester si l'on a bien comme le prédit la théorie:

$$(66)\ c_{ii}^{j*} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \Leftrightarrow b_j^{i*} \underset{>}{\overset{<}{=}} 0$$

[20]Il y a en effet (N+l) sensibilités des demandes d'actifs par rapport à la richesse initiale, (N+1) sensibilités par rapport à l'espérance totale du portefeuille et également (N+l) sensibilités par rapport au risque total du portefeuille. L'utilisation de la relation (61) permet de réduire le nombre des sensibilités par rapport aux rendements espérés des différents actifs à (N+l)/2 (N+2). Le nombre des sensibilités par rapport aux variances-covariances des rendements est égal à N (N+l $)^2$/2, car il n'y a que N actifs risqués. Il reste N^2 + (N+l) + 3 contraintes dû au respect de la contrainte budgétaire. Au total, il n'y a que 0.5 N^3 + 0.5 N^2 + 4 N coefficients indépendants.

i.e. les effets de risque croisés (compensés des effets de risque total) sont positifs ou négatifs suivant que les actifs sont substituables ou complémentaires.

On peut également tester si on a en moyenne sur la période:

$$(67)\quad \frac{a_k}{a_i} = \frac{c_{ii}^{k*}}{c_{kk}^{i*}}$$

4. La fonction d'espérance globale

Il est possible de démontrer beaucoup plus simplement certaines des propriétés que nous venons d'établir en ayant recours aux outils de la dualité. Après avoir défini et étudié les propriétés de la fonction d'espérance globale nous en déduirons les propriétés des demandes à risque global constant.

4.3.1. Définition et propriétés

Dans le primal de l'investisseur on considère que l'agent économique cherche à résoudre le programme suivant:

$$\underset{\mathbf{a}}{\mathrm{Max}}\ U(E,V)$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} a_i = A \\ \sum_{i=1}^{N} m_i\ a_i + E' \equiv E \\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i\ a_j\ \sigma_{ij} + V' \equiv V \end{cases}$$

La solution de ce programme **a*** est telle que:

$$(68)\ \mathbf{a}^* = a(\mathbf{m}, \Sigma, A, E', V')$$

On peut considérer également le programme dual suivant:

$$\underset{\mathbf{a}}{\mathrm{Max}}\ U(E,\overline{V})$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} a_i = A \\ \sum_{i=1}^{N} m_i\ a_i + E' \equiv E \\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i\ a_j\ \sigma_{ij} + V' \equiv \overline{V} \end{cases}$$

Puisque la fonction d'utilité Moyenne-Variance est par hypothèse une fonction croissante de l'espérance mathématique de la richesse future, ce programme est équivalent au programme suivant:

$$\underset{\mathbf{a}}{\mathrm{Max}} \sum_{i=1}^{N} m_i \; a_i + E'$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} a_i = A \\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i \; a_j \; \sigma_{ij} + V' \equiv \overline{V} \end{cases}$$

La solution de ce programme $\mathbf{a_V}$ est telle que:

(69) $\mathbf{a}_{\mathbf{V}}^{*} = a\left(\mathbf{m}, \Sigma, A, E', \overline{V}\right)$

A la différence des demandes **a*** les fonctions de demande d'actifs (69) ne sont pas observables et expriment les demandes optimales pour un risque global du portefeuille donné. Il est cependant possible de montrer que ces demandes à risque constant possèdent des propriétés remarquables.

On peut considérer que l'investisseur choisit le portefeuille qui a le rendement espéré le plus élevé parmi tous les portefeuilles qu'il peut acheter et qui lui font courir un risque donné. On formalise le comportement de cet investisseur par le programme:

$$E(\mathbf{m}, A, V) = \underset{\mathbf{a}}{\mathrm{Max}} \left\{ \mathbf{m}'\mathbf{a}; \text{ s.c. } \mathbf{1}'\mathbf{a} = A \text{ et } \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a} = V \right\}$$

où E(**m**,A,V) est la fonction d'espérance globale. Les conditions du premier ordre pour un maximum s'écrivent:

$$\begin{cases} m_k - \lambda \; p_k - 2\varphi \sum_{j=1}^{N} a_j \; \sigma_{jk} = 0 \\ \mathbf{1}'\mathbf{a} = A \\ \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a} = V \end{cases}$$

où λ et φ sont les multiplicateurs de Lagrange associé aux contraintes de budget et de risque, respectivement.

Proposition 1: Les propriétés de la fonction espérance globale du portefeuille E(**m**,A,V) sont les suivantes:

(i) L'espérance globale du portefeuille est homogène de degré 1; i.e. $\forall k > 0, \; E(k \times \mathbf{m}, A, V) = k \, E(\mathbf{m}, A, V)$

(ii) L'espérance du portefeuille est convexe par rapport aux rendements espérés des actifs; i.e. si $\mathbf{m}'' = k \times \mathbf{m}' + (1-k) \times \mathbf{m}$ et si $0 \le k \le 1$ alors $E(\mathbf{m}'', A, V) \le k \times E(\mathbf{m}', A, V) + (1-k) \times E(\mathbf{m}, A, V)$

(iii) Lemme de Shepard[21]:

[21]Le lemme de Shepard nous indique que l'augmentation du rendement global induit par l'augmentation du rendement de l'actif i est égal à la variation du rendement du portefeuille initial et que la recomposition du portefeuille n'a pas d'effet sensible sur l'espérance globale.

$$\frac{\partial E(\mathbf{m},A,V)}{\partial m_i} = x_i(\mathbf{m},A,V)$$

<u>Démonstration</u>:

(i) Si **a°,** maximisait E(k **m**,A,V) alors que **a** maximise E(**m**,A,V) on aurait par définition de la fonction d'espérance globale[22]:

$$E(k \times \mathbf{m},A,V) = k \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}° > k \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}° > \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = E(\mathbf{m},A,V)$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.

(ii) Par définition:

$$E(\mathbf{m}'',A,V) = \mathbf{m}'' \cdot \mathbf{a}'' = k \times \mathbf{m}' \cdot \mathbf{a}'' + (1-k) \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}''$$

Or les inégalités suivantes doivent être vérifiées

$$\mathbf{m}' \cdot \mathbf{a}'' \leq E(\mathbf{m}',A,V)$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}'' \leq E(\mathbf{m},A,V)$$

et la substitution des inégalités précédentes dans l'équation (68) démontre la convexité.

(iii) L'influence d'une variation du rendement de l'actif i sur le rendement espéré du portefeuille s'écrit:

$$\frac{\partial E(\mathbf{m},A,V)}{\partial m_i} = x_i + \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial m_i}$$

Or d'après les conditions du premier ordre on peut réécrire cette équation:

$$\frac{\partial E(\mathbf{m},A,V)}{\partial m_i} = x_i + \lambda \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x_k}{\partial m_i} + 2\,\varphi \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial m_i}$$

or puisque la richesse initiale et le risque global ne varie pas on a nécessairement:

$$dA = 0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x_k}{\partial m_i}$$

$$dV = 0 = 2\sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial m_i}$$

en substituant ces relations dans l'équation précédente on obtient la propriété (iii).

4.3.2. Les demandes à risque global constant

En supposant l'espérance globale deux fois différentiable on obtient la proposition suivante:

Proposition 2: La matrice des effets de substitution est symétrique et semi-définie positive.

[22]Un "." désigne l'opérateur produit scalaire.

En effet, la différentiabilité de la fonction d'espérance globale et le lemme de Shepard (iii) nous permettent d'écrire:

$$\frac{\partial E(\mathbf{m}, A, V)}{\partial m_i \partial m_k} = \frac{\partial x_i(\mathbf{m}, A, V)}{\partial m_k} = \frac{\partial x_k(\mathbf{m}, A, V)}{\partial m_i} = \frac{\partial E(\mathbf{m}, A, V)}{\partial m_k \partial m_i}$$

De plus la convexité de l'espérance globale implique que la matrice $\left(\frac{\partial E(\mathbf{m}, A, V)}{\partial m_k \partial m_i}\right)_{\substack{i=1,\dots,N \\ k=1,\dots,N}}$ est semi définie positive.

Enfin, les demandes d'actif à risque global constant sont homogènes de degré zéro:

$$\mathbf{a}(k \times \mathbf{m}, A, V) = \mathbf{a}(\mathbf{m}, A, V)$$

En effet, la fonction d'espérance globale étant homogène de degré un ses dérivées sont homogènes de degré zéro et par le lemme de Shepard ses dérivées sont identiquement égales aux demandes d'actifs à risque global constant.

5. Conclusion

Même si certaines des hypothèses implicitement contenues dans le modèle Moyenne-Variance ont pu déplaire aux théoriciens ceci ne constitue pas une preuve définitive du manque d'intérêt de ce modèle. Il est possible que dans les faits ces hypothèses restrictives ne jouent qu'un rôle mineur et que par conséquent le modèle Moyenne-Variance soit une approximation raisonnable de la réalité. Il est par conséquent raisonnable de chercher à tester si les faits rejettent ou non ce modèle.

L'étude des propriétés des demandes optimales d'actifs financiers dans le cadre du modèle Moyenne-Variance est également intéressante puisqu'il est possible de définir sans ambiguïté dans ce cadre, et dans ce cadre seulement, les notions de rentabilité, de risque et de corrélation que l'on peut identifier de façon opérationnelle avec l'espérance mathématique et la variance du rendement aléatoire d'un actif ainsi que la covariance entre les rendements aléatoires de deux actifs. C'est donc une étape essentielle pour l'étude des propriétés des demandes optimales d'actifs lorsque l'on sera en mesure de définir sans ambiguïté les notions de risque et de corrélation dans un cadre plus général que celui du modèle Moyenne-Variance. En effet, si les demandes d'actifs dans le cadre particulier du modèle Moyenne-Variance ne possèdent aucune propriété remarquable relativement à des variations du risque individuel des actifs et de la corrélation entre les actifs, il serait alors inutile de chercher à établir les propriétés des demandes optimales relativement à ces mêmes paramètres de risque et de corrélation dans un cadre plus général. Si au contraire, nous sommes en mesure d'identifier des propriétés dans le cadre du modèle Moyenne-Variance cela constituera à la fois un encouragement et des indications pour entreprendre des recherches d'une plus grande généralité. Il serait ainsi intéressant de chercher à montrer si un déplacement au sens de la dominance stochastique du premier (second) ordre de la distribution du rendement d'un actif induit l'augmentation (la diminution) de la demande compensée de ce même actif. Une augmentation du rendement espéré (de la variance) d'un actif correspond en effet à un déplacement au sens de la dominance stochastique du premier (second) ordre de la distribution du rendement de cet actif[23].

Enfin il est également encourageant de voir que l'on peut établir des propriétés très générales pour certaines fonctions comme celle que nous avons appelé la fonction d'espérance globale. Il devient désormais possible de déterminer de nouveaux systèmes de demande d'actifs financiers en postulant une forme particulière de la fonction d'espérance globale, plutôt qu'en postulant une fonction d'utilité particulière. En effet, nous savons que la fonction d'espérance globale d'un investisseur rationnel doit être convexe et homogène de degré un par rapport aux taux de rendement espérés. En dehors de ces contraintes de rationalité nous sommes libres de supposer les formes qui sont les plus utiles pour la fonction d'espérance globale. Il serait sans doute utile de s'inspirer de celles qu'on a imposé aux fonctions de dépense des consommateurs et aux fonctions de coût des entreprises.

[23]Cf. P. Brockett et Y. Kahane (1992).

APPENDICE

[1] L'objet de cet appendice est de montrer la validité de la relation (42).

$$\left.\frac{\partial\left(x_i x_j\right)}{\partial\sigma_{ij}}\right|_{COMP-V'} = x_j \left.\frac{\partial x_i}{\partial\sigma_{ij}}\right|_{COMP-V'} + x_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial\sigma_{ij}}\right|_{COMP-V'}$$

$$= -2\ U_V(*)\left[x_j^2\ \frac{D_{ii}}{D} + x_i^2\ \frac{D_{jj}}{D} + 2\left(x_i x_j\right)\frac{D_{ij}}{D}\right] \geq 0$$

car le terme entre crochets est négatif ou nul et parce que nous avons supposé que l'utilité marginale de la variance est strictement négative. L'Hessienne bordé étant en effet semi-défini négatif son inverse l'est également, on a par conséquent pour un portefeuille quelconque **x**:

$$\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x} \leq 0 \text{ où } \mathbf{D} = \left(\frac{D_{ij}}{D}\right)$$

En particulier pour le vecteur suivant:

$$\mathbf{x}' = \left(0,\ldots,x_j,0,\ldots,x_i,0,\ldots,0\right)$$

où le premier terme non nul est dans la i^{ème} colonne et le deuxième terme non nul est dans la j^{ème} colonne, on a la relation:

$$\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x} = \left[x_j^2\ \frac{D_{ii}}{D} + x_i^2\ \frac{D_{jj}}{D} + 2\left(x_i x_j\right)\frac{D_{ij}}{D}\right] \leq 0$$

[2] L'objet de cet appendice est de démontrer la validité des relations (49) et (50). D'après (20) on a:

$$\frac{\partial x_k}{\partial E'} = \sum_{l=1}^{N}\left(-\ U_{EE}(*)\ m_l - 2\ U_{VE}(*)\sum_{h=1}^{N} x_h\ \sigma_{hl}\right)\frac{D_{lk}}{D}$$

$$= \sum_{l=1}^{N}\left(-\ U_{EE}(*)\ m_l - \frac{U_{VE}(*)}{U_V(*)}\ \left(\lambda\ p_l - U_E(*)\ m_l\right)\right)\frac{D_{lk}}{D}$$

car on a d'après les conditions du premier ordre (11)

$$\sum_{h=1}^{N} x_h\ \sigma_{hl} = \frac{\left(\lambda\ p_l - U_E(*)\ m_l\right)}{2U_V(*)}$$

ce qui permet d'écrire en utilisant le théorème relatif au développement d'un déterminant en fonction des cofacteurs étrangers:

$$(49)\quad \frac{\partial x_k}{\partial E'} = \sum_{l=1}^{N}\left(-\ U_{EE}(*) - \frac{U_{VE}(*)}{U_V(*)}\ U_E(*)\right) m_l\ \frac{D_{lk}}{D}$$

D'après (29) on peut écrire:

$$\frac{\partial x_k}{\partial V'} = -U_{EV}(*) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D} - 2\, U_{VV}(*) \sum_{l=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} x_h\, \sigma_{hl} \frac{D_{lk}}{D}$$

$$= \left(-U_{EV}(*) \sum_{l=1}^{N} m_l - \frac{U_{VE}(*)}{U_V(*)} \sum_{l=1}^{N} \left(\lambda\, p_l - U_E(*)\, m_l \right) \right) \frac{D_{lk}}{D}$$

ce qui permet d'écrire en utilisant le théorème relatif au développement d'un déterminant en fonction des cofacteurs étrangers:

$$(50)\quad \frac{\partial x_k}{\partial V'} = \left(U_{VV}(*) \frac{U_E(*)}{U_V(*)} - U_{EV}(*) \right) \sum_{l=1}^{N} m_l \frac{D_{lk}}{D}$$

Bibliographie

BOURGUIGNON François, Pierre-André CHIAPPORI et **Patrick REY** (1992), *Théorie micro-économique*, Tome 1, Fayard: Paris.

BROCKETT Patrick et **Yehuda KAHANE** (1992): "Risk, Return, Skewness et Preference", *Management Science*, p. 851-866.

COURAKIS Anthony (1988): "Modelling portfolio selection", *Economic Journal*, p. 619-642.

COURAKIS Anthony S. (1974): "Clearing bank asset choice behaviour: a Mean-Variance treatment", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics, p.* 173-201.

COURTAULT Jean-Michel (1992) : "Les effets de substitution et de richesse de la théorie du portefeuille : une mise au point", *Revue Economique*, p. 983-1005.

COURTAULT Jean-Michel (1994): "Econométrie du portefeuille: l'approche de l'information", *Recherches Economiques de Louvain*, n° 2, p.211-248.

DEATON Angus et **John MUELLBAUER** (1980), *Economtcs and consumer behaviour*, Cambridge University Press: Cambridge.

DIXIT Avinash K. (1990), *Optimization in Economic Theory*, 2ème Edition, Oxford University Press: Oxford.

HART Oliver D. et **Dwight M. JAFFEE** (1974): "On the application of portfolio theory to depository financial intermediaries", *Review of Economic Studies*, pp. 129-147.

JONES-LEE M. W. (1971): "Some portfolio adjustment theorems for the case of non-negativity constraints on security holdings", *Journal of Finance*, p. 763-775.

LEVY Haïm (1974): "The demand for assets under conditions of risk", *Journal of Finance*, p. 79-96.

MILLER Stephen M. (1975): "Measures of risk aversion: some clarifying comments", *Journal of Financial and Quantitative Analysis, p.* 299-309.

PARKIN Michael (1970): "Discount house portfolio and debt selection", *Review of Economic Studies*, p. 469-497.

ROYAMA Shoichi et Koichi HAMADA (1967): "Substitution and complementarity in the choice of risky assets" in J. Tobin et D. Hester, *Risk aversion and portfolio choice*, Wiley: New-York.

SAITO Mitsuo (1977): "Household flow-of-funds equations", *Journal of Money Credit and Banking*, p. 1-20.